トポロジーにおけるホップ代数の歴史と現状(ホップ代数学とその周辺)

AUTHOR(S):

三村, 護; 逸見, 豊

数理解析研究所講究録
608巻 1987年 77-86

トポロジーにおけるホップ代数の歴史と現状

岡山大・理　三村　護　(Mamoru Mimura)
高知大・理　逸見　豊　(Yutaka Hemmi)

ここではHopf代数とは体 k 上の連結な次数つき添加Hopf代数であり，一般には(余)積の結合性は仮定しない。p は素数または0とし $Z/p=Z/pZ$ $(p\neq 0)$，$Z/0=Q$ とする。以下，空間は連結CW-複体のホモトピー型を持ち，基点＊が与えられているとする。

トポロジーにおいて現われるHopf代数の代表的な例として次の２つがある：

１．mod p Steenrod代数 $A_{(p)}$ $(p\neq 0)$，

２．Hopf空間 X の体 k を係数とする(コ)ホモロジー環

$$H_*(X;k)\ (H^*(X;k)).$$

(mod p Steenrod代数 $A_{(p)}$ について)[15]

$A_{(p)}$ の次数 t の元 α は次をみたすコホモロジー作用素である：

1) 任意の空間 X とその部分空間 A の対 (X,A) 及び任意の非負整数 n に対して $\alpha: H^n(X,A;Z/p)\to H^{n+t}(X,A;Z/p)$ はZ/p一準同型写像である，

2) 対の間の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ が誘導する準同型写像 $f^*: H^*(Y,B;Z/p)\to H^*(X,A;Z/p)$ に対して $f^*\alpha=\alpha f^*$ がなりたつ，

3) 連結準同型写像 $\delta: H^n(A;Z/p)\to H^{n+1}(X,A;Z/p)$ に対して $\delta\alpha=\delta\alpha$ がなりたつ。

$A_{(p)}$ は作用素の合成により次数つき代数となり，さらに次をみたす余積 Δ：$A_{(p)}\to A_{(p)}\otimes A_{(p)}$ によりHopf代数となる：

$$\alpha(xy)=(\Delta\alpha)(x\otimes y)\quad(\alpha\in A_{(p)},\ x,y\in H^*(X,A;Z/p))$$

これにより $A_{(p)}$ は空間の対のコホモロジー環にHopf代数として作用する。$A_{(p)}$ の具体的な構造はよく知られている：代数としての生成元は $p=2$ のときは $\{Sq^t\}_{t>0}$

$(\deg Sq^t = t)$, $p \geqq 3$ のときは $\{P^t, \beta\}_{t>0}$ $(\deg P^t = 2t(p-1),\ \deg \beta = 1)$ であり，それらの間に関係式(Adem relation)がある(cf.数学辞典)。さらに余積に関して次が成り立つ：

$\Delta(Sq^t) = \Sigma_i Sq^i \otimes Sq^{t-i}$, $\Delta(P^t) = \Sigma_i P^i \otimes P^{t-i}$, $\Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$.

またそれらのコホモロジー環への作用は次の条件(非安定条件)をみたす：

$$Sq^t x = x^2 \ (\dim x = t),\ 0 \ (\dim x < t),$$
$$P^t x = x^p \ (\dim x = 2t),\ 0 \ (\dim x < 2t).$$

$A_{(p)}$ の代数としての構造は複雑であるが，双対Hopf代数 $A_{(p)*} = \mathrm{Hom}_{Z/p}(A_{(p)}, Z/p)$ は次の様に単純な構造になっている：

$$A_{(2)*} = Z/2[\xi_1, \xi_2, \cdots],$$
$$A_{(p)*} = Z/p[\xi_1, \xi_2, \cdots] \otimes \Lambda(\tau_0, \tau_1, \cdots) \quad p \geqq 3,$$
$$\deg \xi_i = 2^i - 1 \ (p=2),\ 2(p^i - 1) \ (p \geqq 3),$$
$$\deg \tau_i = 2p^i - 1,$$
$$\psi^*(\xi_i) = \Sigma_j \xi_{i-j}{}^{t(j)} \otimes \xi_j,$$
$$\psi^*(\tau_i) = \tau_i \otimes 1 + \Sigma_j \xi_{i-j}{}^{t(j)} \otimes \tau_j \quad (t(j) = p^j),$$

但し $\psi^* : A_{(p)*} \to A_{(p)*} \otimes A_{(p)*}$ は余積。

(Hopf空間のコホモロジーについて)

空間 X がHopf空間であるとは，連続写像 $\mu : X \times X \to X$ で $\mu(*, \ ) \simeq \mu(\ , *) \simeq \mathrm{id} : X \to X$ をみたすものが存在するときを言う。X がHopf空間のとき対角写像 $\Delta : X \to X \times X$ $(\Delta(x) = (x, x))$ 及び積 $\mu : X \times X \to X$ から誘導される準同型写像により $H^*(X;k)$, $H_*(X;k)$ はHopf代数になる：

$$\Delta^* : H^*(X;k) \otimes H^*(X;k) \cong H^*(X \times X;k) \to H^*(X;k)$$
$$\mu^* : H^*(X;k) \to H^*(X \times X;k) \cong H^*(X;k) \otimes H^*(X;k)$$
$$\mu_* : H_*(X;k) \otimes H_*(X;k) \cong H_*(X \times X;k) \to H_*(X;k)$$
$$\Delta_* : H_*(X;k) \to H_*(X \times X;k) \cong H_*(X;k) \otimes H_*(X;k)$$

ここで定義より Δ^* 及び Δ_* は結合的かつ(次数つきの意味で)可換になるが，μ^* 及び μ_* は必ずしもそうではない。Hopf空間 X の積 $\mu : X \times X \to X$ がホモトピー結合的であるとは $\mu(\mu \times 1) \simeq \mu(1 \times \mu) : X \times X \to X$ が成り立つときをいう。

またホモトピー可換であるとは $\mu T \simeq \mu : X \times X \to X$ が成り立つときをいう。但し $T : X \times X \to X \times X$ は $T(x,y)=(y,x)$ で定まる連続写像である。μ がホモトピー結合的(ホモトピー可換)であれば $\mu^* : H^*(X;k) \to H^*(X;k) \otimes H^*(X;k)$ 及び $\mu_* : H_*(X;k) \otimes H_*(X;k) \to H_*(X;k)$ は結合的(可換)になる。積が結合的かつ可換なHopf代数に関しては次の結果がある。

定理１ (Hopf[8],Borel[2]) H は積が結合的かつ可換な Z/p 上のHopf代数で，次数つきZ/p－加群として有限型であるとする。このとき代数として次のような分解が得られる：

$$H \cong \otimes H_i \qquad \text{（代数の同型）}$$

ここで H_i は次のいずれか

$p=2$ のとき $Z/2[x]/(x^t)$, $t = 2^s$ または ∞,

$p \geqq 3$ のとき (1) $\Lambda(x)$ ($\dim x$: 奇数)

(2) $Z/p[x]/(x^t)$, $t = p^s$ または ∞ ($\dim x$: 偶数),

但し、$t = \infty$ のときは $Z/p[x]/(x^t) = Z/p[x]$ と考える。

定理１よりHopf空間 X に対して $H^*(X;Z/p)$ が有限型であれば代数としての構造は分かりやすい。

Hopf空間の例としては位相群(Lie群)が代表的であるが，さらにループ空間 $\Omega Y = \{f:[0,1] \to Y \text{ 連続} \mid f(0)=f(1)=*\}$ は次で与えられる積 $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ によりホモトピー結合的Hopf空間になる：

$$\mu(f_1,f_2)(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leqq t \leqq 1/2 \\ 2t\text{-}1 & 1/2 \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

またHopf空間 X に対し ΩX はホモトピー可換なHopf空間になることが知られている。

定理２ (Milnor[14]) i) 任意の位相群 G に対して空間 BG で $G \simeq \Omega(BG)$ をみたすものが存在する。

ii) 任意の(適当な条件をみたす)空間 X に対して位相群 $G(X)$ で $\Omega X \simeq G(X)$ をみたすものが存在する。

注意　ループ空間のホモトピー型をもたないHopf空間が存在する：例　$S^7=\{$絶対値１のCayley数$\}$。

有限(次元)CW-複体のホモトピー型を持つHopf空間(有限(次元)Hopf空間)はコンパクトLie群とよく似た性質を持つ。特にコンパクトLie群についてその微分構造を用いて示された多くの結果が有限(次元)Hopf空間に対しても成立することが純粋なホモトピー論的手法により示されている：

定理３　X を有限Hopf空間とする。

i)（Browder[4]）　m を $H_m(X;Z)\neq 0$ なる最大の整数とすれば $H_m(X;Z)\cong Z$ となり，その生成元 ξ に対し $\cap\xi : H^q(X;G)\to H_{m-q}(X;G)$（$G$ は任意のアーベル群）は同型写像になる。

ii)（Hubbuck[9]）　X の積 $\mu : X\times X\to X$ がホモトピー可換ならば X はトーラスのホモトピー型を持つ：$X\simeq S^1\times\cdots\times S^1$

iii)（Browder[4]）　$\pi_m(X)\neq 0$ $(m\geqq 2)$ なる最小の m は奇数である。特に $\pi_2(X)=0$。

iv)（Clark[6]）　X がループ空間のホモトピー型をもてば $\pi_3(X)\otimes Q\neq 0$ または$X\simeq *$ 。

v)（Hubbuck-Kane[10]）　$\pi_3(X)$ は自由Z－加群である。

vi)（Lin[12],Kane[11]）　$H_*(\Omega X;Z)$ は自由Z－加群である。

以下 X はループ空間のホモトピー型を持つ有限Hopf空間(有限ループ空間)とする。例えばコンパクトな位相群。このとき定理１より次が成り立つ：

(4)　　$$H^*(X;Q)\cong\Lambda(x_1,\cdots,x_r),\ \dim x_i=2n_i-1,$$

r を X の階数，$(2n_1-1,\cdots,2n_r-1)$ を X の(有理)型という。X がコンパクトLie群であれば，r は通常の階数であり，$\Sigma_i 2n_i-1=\dim X$ となる。ここで次の問題を考える：

問題５　(4)をみたす有限ループ空間が存在するための $(n_1,\cdots,n_r)$ の条件はなにか？

今，有限ループ空間 X が(4)をみたせば Borel[2] により，有限個の素数を除いて次が成り立つ：

$$H^*(X;Z/p) \cong \Lambda(x_1,\cdots,x_r),\ \dim x_i = 2n_i-1.$$

よって，X の分類空間 BX（$\Omega(BX)\simeq X$）を考えることにより次が分かる：

命題6 (4)をみたす有限ループ空間 X が存在すれば X の分類空間 BX は有限個の素数を除いて次をみたす

(7) $$H^*(BX;Z/p) \cong Z/p[y_1,\cdots,y_r],\ \dim y_i = 2n_i.$$

上の命題より(7)をみたす空間 BX の存在するための $(n_1,\cdots,n_r)$ の条件を調べることが問題になる。

ここで X が半単純コンパクトLie群の時を考えてみる。今 T を X の極大トーラス，W(X) をWeyl群とする。よく知られているように W(X) は T の分類空間 BT に作用し，よって $H^*(BT;Z/p)$ に作用する。そこで $H^*(BT;Z/p)^{W(X)}$ をその作用に関する不変式とすると包含写像 $T\to X$ から誘導される自然な写像 $BT\to BX$ により次の準同型写像が定義される。

(8) $$H^*(BX;Z/p)\to H^*(BT;Z/p)^{W(X)} = Z/p[t_1,\cdots,t_r]^{W(X)},\ \dim t_i = 2.$$

ここで次のよく知られた結果がある：

定理9 (Borel[2]) $p\neq 0$ のときは W(X) の位数は p と素であるとする。このとき(8)は同型写像となり，さらに

$$H^*(BX;Z/p) \cong Z/p[y_1,\cdots,y_r],\ |W(X)| = \Pi n_i\ (\dim y_i = 2n_i)$$

が成り立つ。

さて Clark-Ewing は上の場合を一般化することにより問題5を次の形で考えた：

V を体 k 上の階数 r のベクトル空間、W を GL(V) の有限部分群とする。このとき W は V 上の対称代数 $S[V]=k[t_1,\cdots,t_r]$ ($\deg t_i = 2$) に作用する。

問題10 不変式 $S[V]^W$ が多項式環になるための条件はなにか？

問題11 $S[V]^W$ が空間のコホモロジーとして実現できる，すなわち，空間 Y で $H^*(Y;Z/p)\cong S[V]^W$ をみたすものが存在するための条件はなにか？

以下これらの問題を Clark-Ewing[7] に従って考えていく。

問題11については次のよく知られた結果がある。

定理12 ([5][16][3]) char k = p とし，$p\neq 0$ のときは W の位数 $|W|$ は p と素であるとする。このとき $S[V]^W=k[y_1,\cdots,y_r]$ となるための必要十分条件は W

が鏡映群であることである。さらにこのとき $|W|=\Pi n_i$ ($\deg y_i = 2n_i$) が成り立つ。

p を素数，W を有限群，$Z_p\hat{}$ を p 進整数環，Q_p を p 進数体とする。今，自然な包含写像 $GL_r(Z_p\hat{})\to GL_r(Q_p)$ 及び自然な射影 $GL_r(Z_p\hat{})\to GL_r(Z/p)$ を用いて，W の$Z_p\hat{}$-表現はQ_p-表現及びZ/p-表現を与える。このとき次が成り立つ：

定理13 (Clark-Ewing) 位数が p と素な有限群 W についてそのZ/p-鏡映群としての忠実表現の同型類とQ_p-鏡映群としての忠実表現の同型類は上の対応により一対一に対応する。さらにこのとき $Z/p[y_1,\cdots,y_r]^W$ と $Q_p[y_1,\cdots,y_r]^W$ の階数及び型は一致する。但し，環 R 上の多項式環 $R[y_1,\cdots,y_r]$, $\dim y_i = 2n_i$ ($n_1\leqq\cdots\leqq n_r$) に対して r 及び $(n_1,\cdots,n_r)$ をそれぞれ階数及び型とよぶ。

定理13より，$k=Z/p$ のときの問題10は $GL_r(Z_p\hat{})$ の有限部分群で $GL_r(Q_p)$ の鏡映群となるものの分類の問題になる。

次に問題11を考える。

命題14 char $k = p$ とし，$p\neq 0$ のときは W の位数は p と素であるとする。このとき任意の自由W-空間 Y に対して次が成り立つ：

$$H^*(Y/W;k) \cong H^*(Y;k)^W.$$

命題14より問題11は $H^*(Y;k)\cong k[t_1,\cdots,t_r]$ をみたす自由W-空間 Y の構成の問題になる。

W を $GL_r(Z_p\hat{})$ の有限部分群とする。このとき W は $K((Z_p\hat{})^r,2)$ に作用する。但し $K(G,n)$ は (G,n) 型のEilenberg-MacLane空間である。EW を可縮な自由W-空間とすれば，W は $Y=K((Z_p\hat{})^r,2)\times EW$ に自由に作用する。よく知られているように $H^*(Y;R)\cong H^*(K((Z_p\hat{})^r,2);R)\cong R[t_1,\cdots,t_r]$ ($\dim t_i = 2$, $R=Z_p\hat{},Z/p,Q_p$) となる。ここで $X(W,p,r)=Y/W$ とおけば定理13と命題14より次を得る：

定理15 W を $GL_r(Z_p\hat{})$ の有限部分群で位数が p と素なものとする。さらに W が $GL_r(Q_p)$ の鏡映群であれば，次が成り立つ：

$$H^*(X(W,p,r);Z/p)\cong Z/p[t_1,\cdots,t_r]^W\cong Z/p[y_1,\cdots,y_r],$$

$$|W|=\Pi n_i \ (\dim y_i = 2n_i)$$

さて位数が p と素な Q_p-鏡映群の分類に関しては Clark-Ewing の次の結果がある：

定理16　W を位数が p と素な有限群とする。このとき W が Q_p-鏡映群としての忠実な表現を持つ必要十分条件は C-鏡映群としての忠実な表現をもちさらにその指標体が Q_p に含まれることである。さらにこのとき $Q_p[t_1,\cdots,t_r]^W$ と $C[t_1,\cdots,t_r]^W$ の階数及び型は一致する。

C-鏡映群の分類は Shephard-Todd[16] により得られている。その結果を用いて次を得る：

定理17　W を $GL_r(Z_p\hat{})$ の有限部分群で位数が p と素であり，$GL_r(Q_p)$ において鏡映群になっているものとする。このとき $H^*(X(W,p,r);Z/p)$ として実現される多項式環の型は末尾の表から得られる：

さて $Z/p[y_1,\cdots,y_r]$ ($\dim y_i = 2n_i$) が空間のコホモロジー環として実現されるならば，それは非安定 $A_{(p)}$-代数の構造を持つ。Adams-Wilkerson は非安定 $A_{(p)}$-代数に関して次の結果を得た：

定理18 ([1])　任意の非安定 $A_{(p)}$-代数 $Z/p[y_1,\cdots,y_r]$ ($\dim y_i = 2n_i$) に対して，もし Πn_i が p と素ならば

$$Z/p[y_1,\cdots,y_r] \cong S[V]^W$$

をみたす $GL(V)$ の有限部分群 W が存在する。但し V は階数 r の Z/p-ベクトル空間。さらにこのとき $|W| = \Pi n_i$ が成り立つ。

Clark-Ewing 及び Adams-Wilkerson の結果より次を得る：

系19　Πn_i は p と素とする。この時(7)をみたす空間 BX が存在するための必要十分条件は型 $(n_1,\cdots,n_r)$ が Clark-Ewing の表から得られることである。

さて問題５にもどろう。今，与えられた型 $(n_1,\cdots,n_r)$ に対して Πn_i と素でない素数は有限個である。よって命題６及び系19より次を得る：

命題20　(4)をみたす有限ループ空間 X が存在すれば，次をみたす p_0 が存在する：

(21) $p \geqq p_0$ なる任意の素数 p に対して Πn_i は p と素でありかつ型 $(n_1,\cdots,n_r)$ は Clark-Ewing の表から得られる。

問題５に対しては古くから次の予想がある：

予想　任意の有限ループ空間 X に対してLie群 G で次をみたすものが存在する：

$$H^*(X;Q) \cong H^*(G;Q).$$

もし予想が正しければ有限ループ空間 X の型 $(n_1,\cdots,n_r)$ は(21)をみたす。ところが (2,2,2,4,4,4,6,6,8,8,10,12,12,14) は $p_0=5$ に対して(21)をみたすがLie群の型にはなっていない。すなわち Clark-Ewing, Adams-Wilkerson の結果は予想の肯定的解決とはなっていない。最近，Lin[13] により，さらに良い結果がえられたという情報があるが，詳細は伝わっていない。

番号	階数	位数	素数	指標体	型
1	n	(n+1)!	$p \nmid (n+1)!$	Q	$2,3,\cdots,(n+1)$
2a*	n	$qm^{n-1}n!$	$p \nmid n!, p\equiv 1 \bmod m$	$Q(\theta)$	$m,2m,\cdots,(n-1)m,qn$
2b	2	2m	$m>2, p\equiv \pm 1 \bmod m$	$Q(\theta+\theta^{-1})$	2,m
3	1	m	$p\equiv 1 \bmod m$	$Q(\theta)$	m
4	2	24	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	4,6
5	2	72	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	6,12
6	2	48	$p\equiv 1 \bmod 12$	$Q(i,\omega)$	4,12
7	2	144	$p\equiv 1 \bmod 12$	$Q(i,\omega)$	12,12
8	2	96	$p\equiv 1 \bmod 4$	$Q(i)$	8,12
9	2	192	$p\equiv 1 \bmod 8$	$Q(i,\sqrt{2})$	8,24
10	2	288	$p\equiv 1 \bmod 12$	$Q(i,\omega)$	12,24
11	2	576	$p\equiv 1 \bmod 24$	$Q(\varepsilon,\omega)$	24,24
12	2	48	$p\equiv 1,3 \bmod 8, p\neq 3$	$Q(\sqrt{-2})$	6,8
13	2	96	$p\equiv 1 \bmod 8$	$Q(i,\sqrt{2})$	8,12
14	2	144	$p\equiv 1,19 \bmod 24$	$Q(\omega,\sqrt{-2})$	6,24
15	2	288	$p\equiv 1 \bmod 24$	$Q(i,\omega,\sqrt{2})$	12,24
16	2	600	$p\equiv 1 \bmod 5$	$Q(\eta)$	20,30
17	2	1200	$p\equiv 1 \bmod 20$	$Q(i,\eta)$	20,60

18	2	1800	$p\equiv 1 \bmod 15$	$Q(\omega,\eta)$	30,60
19	2	3600	$p\equiv 1 \bmod 60$	$Q(i,\omega,\eta)$	60,60
20	2	360	$p\equiv 1,4 \bmod 15$	$Q(\omega,\sqrt{5})$	12,30
21	2	720	$p\equiv 1,49 \bmod 60$	$Q(i,\omega,\sqrt{5})$	12,60
22	2	240	$p\equiv 1,9 \bmod 20$	$Q(i,\sqrt{5})$	12,20
23	3	120	$p\equiv 1,4 \bmod 5$	$Q(\sqrt{5})$	2,6,10
24	3	336	$p\equiv 1,2,4 \bmod 7$	$Q(\sqrt{-7})$	4,6,14
25	3	648	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	6,9,12
26	3	1296	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	6,12,18
27	3	2160	$p\equiv 1,4 \bmod 15$	$Q(\omega,\sqrt{5})$	6,12,30
28	4	1152	$p\neq 2$ or 3	Q	2,6,8,12
29	4	7680	$p\equiv 1 \bmod 4, p\neq 5$	$Q(i)$	4,8,12,20
30	4	14,400	$p\equiv 1,4 \bmod 5$	$Q(\sqrt{5})$	2,12,20,30
31	4	$64\cdot 6!$	$p\equiv 1 \bmod 4, p\neq 5$	$Q(i)$	8,12,20,24
32	4	$216\cdot 6!$	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	12,18,24,30
33	5	$72\cdot 6!$	$p\equiv 1 \bmod 3$	$Q(\omega)$	4,6,10,12,18
34	6	$108\cdot 9!$	$p\equiv 1 \bmod 3, p\neq 7$	$Q(\omega)$	6,12,18,24,30,42
35	6	$72\cdot 6!$	$p\geqq 7$	Q	2,5,6,8,9,12
36	7	$8\cdot 9!$	$p\geqq 11$	Q	2,6,8,10,12,14,18
37	8	$192\cdot 10!$	$p\geqq 11$	Q	2,8,12,14,18,20,24,30

但し * は $m>1$ かつ $m=qr$。また $i=\sqrt{-1}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$, $\eta=e^{2\pi i/5}$, $\varepsilon=e^{2\pi i/8}$, $\theta=e^{2\pi i/m}$。

[参考文献]

[1] J.F.Adams and W.Wilkerson, Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra, Ann. of Math. 111(1980), 95-143.

[2] A.Borel, Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math. 57(1953), 115-

207.

[3] N.Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, (1968)

[4] W.Browder, Torsion in H-spaces, Ann. of Math. 74(1961), 24-51.

[5] C.Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 77(1955), 778-782.

[6] A.Clark, On π_3 of finite dimensional H-spaces, Ann. of Math. 78(1963) 193-196.

[7] A.Clark and J.Ewing, The realization of polynomial algebra as cohomology rings, Pacific J. Math. 50(1974), 425-434.

[8] H.Hopf, Uber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache, Trans. Amer. Math. Soc. 102(1962), 637-665.

[9] J.R.Hubbuck, On homotopy-commutative H-spaces, Topology 8(1969), 119-126.

[10] J.R.Hubbuck and R.M.Kane, On π_3 of a finite H-space, Trans. Amer. Math. Soc. 213(1975), 99-105.

[11] R.M.Kane, Implications in Morava K-theory, Mem. Amer. Math. Soc. 340 (1986).

[12] J.P.Lin, Torsion in H-spaces II, Ann. of Math. 107(1978), 41-88.

[13] J.P.Lin, Realization of Hopf algebras by Hopf spaces, lecture at Arcata, 1986 July.

[14] J.Milnor, Constructions of universal bundles, I , II, Ann. of Math. 63 (1956), 272-284, 430-436.

[15] J.Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math. 67(1958), 150-171.

[16] G.C.Shephard and J.A.Todd, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math. 6(1954), 274-304.